Máquina de Turing e o Problema da Parada

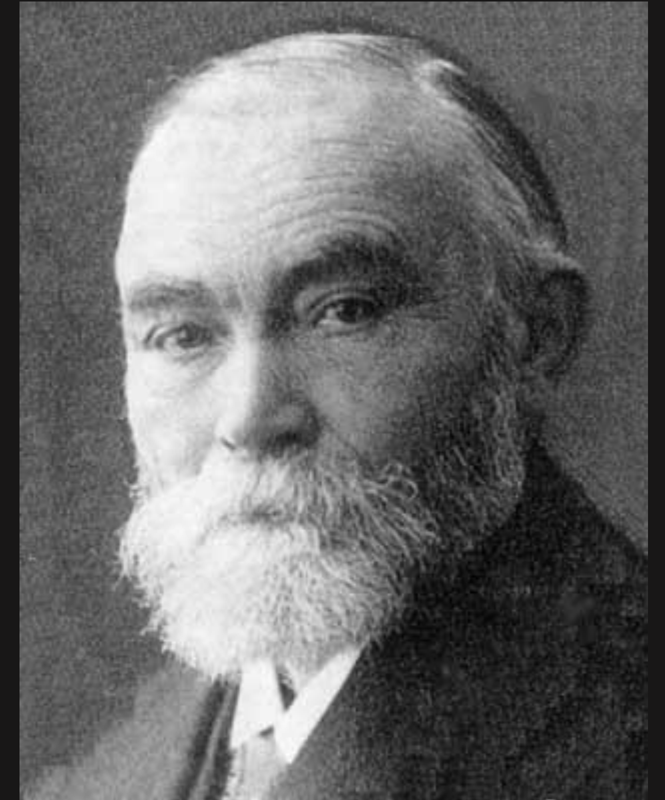
#11

Incompletude em Sistemas Formais

Breve História

No ano de 1879, o lógico alemão Gottlob Frege mostrou como o raciocínio matemático empregado na demonstração de teoremas matemáticos pode ser reduzido à manipulação simbólica.

Estamos falando dos *sistemas formais*.

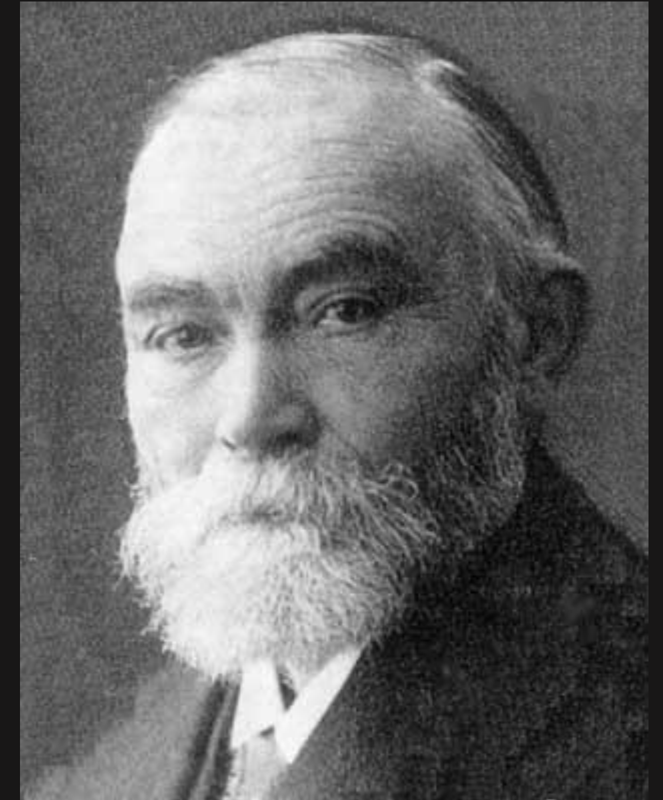


Gottlob Frege (1848-1925)

Breve História

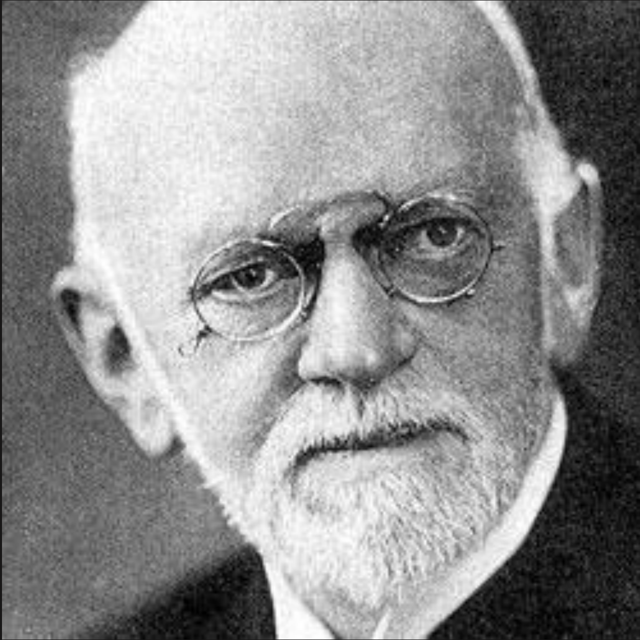
Em um sistema formal, as proposições matemáticas são representadas por uma string de símbolos e uma prova é, então, uma sequência finita dessas strings de símbolos.

Como estamos lidando com um objetos combinatórios, os próprios sistemas formais tornam-se eles mesmos objetos de estudo matemático – donde temos a *metamatemática*.



Gottlob Frege (1848-1925)

Breve História



David Hilbert (1862-1943)

O chamado Programa de Hilbert tinha por objetivo demonstrar, por meios finitários, que tais sistemas seriam consistentes e completos (duas propriedades metamatemáticas).

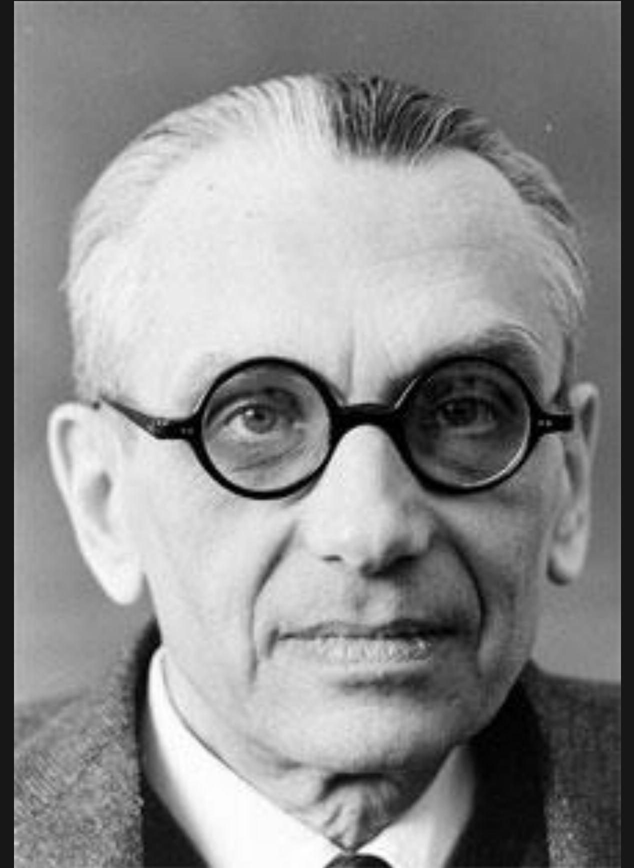
Isto significaria que tais sistemas seriam livres de inconsistências, e ainda que cada sentença de um tal sistema poderia ser provada ou refutada.

Breve História

O teorema da incompletude de Gödel mostra que não é possível que um sistema formal (que possua um mínimo de aritmética), seja simultaneamente consistente e completo.

Como corolário, ainda obteve que a sentença que expressa a consistência deste sistema não pode ser demonstrada no próprio sistema.

A teoria da computabilidade pode nos dar uma demonstração daquele primeiro resultado.



Kurt Gödel (1906-1976)

Indecidibilidade e Incompletude

No vídeo anterior, mostramos a existência de um conjunto que é recursivamente enumerável, mas que não é recursivo (decidível), a saber, nosso conjunto K do problema da parada de Turing:

$$K = \{i : P_i(i) \downarrow\}.$$

Consideremos proposições da forma $n \notin K$, em que n é um número natural fixado.

Indecidibilidade e Incompletude

Podemos supor que em um determinado sistema formal, cada uma dessas proposições pode ser representada por uma sequência de símbolos (uma fórmula), digamos, P_n, e que os teoremas desse sistema possam ser gerados mecanicamente.

Assumimos que exista um algoritmo que, dado um número natural n, nos permita obter P_n.

Denominemos tal sistema formal de F, e escrevemos $\vdash_F P_n$ para dizer que P_n é teorema de F.

Indecidibilidade e Incompletude

Hipótese de Corretude (HC): Dizemos que um sistema formal F é correto se sempre que $\vdash_F P_n$ para um dado $n \in \mathbb{N}$, então P_n é verdadeira, isto é, é o caso de que $n \notin K$.

Ou seja, a HC diz que sentenças que possuem prova são verdadeiras.

TEOREMA DA INCOMPLETUDE: Seja F um sistema formal correto. Então, existe um número natural n_0 tal que $n_0 \notin K$, mas a sentença $P_{n_0} =_{def}$ "$n_0 \notin K$" não possui prova em F.

TEOREMA DA INCOMPLETUDE: Seja F um sistema formal correto. Então, existe um número natural n_0 tal que $n_0 \notin K$, mas a sentença $P_{n_0} =_{def}$ "$n_0 \notin K$" não possui prova em F.

Demonstração.
Suponha por absurdo que não exista tal n_0.
Assim, para todo $n \notin K$, a sentença P_n possui prova em F, isto é,

$$\vdash_F P_n, \text{ para um dado } n, \text{ se e somente se } n \notin K.$$

Já sabemos (pelo vídeo anterior) que o conjunto K é recursivamente enumerável. Sendo assim, podemos criar o seguinte algoritmo para calcular f_K, a função característica de K:

TEOREMA DA INCOMPLETUDE: Seja F um sistema formal correto. Então, existe um número natural n_0 tal que $n_0 \notin K$, mas a sentença $P_{n_0} =_{def}$ "$n_0 \notin K$" não possui prova em F.

Demonstração.

Iniciamos gerando os teoremas do sistema formal e ao mesmo tempo listando os elementos do conjunto K.

Se $n \in K$, então em algum momento ele aparecerá na lista dos elementos que pertencem a K, daí, fazemos $f_K(n) = 1$;

Se $n \notin K$, então a sentença P_n será em algum momento exibida na lista de teoremas do sistema. Pela hipótese de correção, P_n é verdadeira. Daí, fazemos $f_K(n) = 0$.

TEOREMA DA INCOMPLETUDE: Seja F um sistema formal correto. Então, existe um número natural n_0 tal que $n_0 \notin K$, mas a sentença $P_{n_0} =_{def}$ "$n_0 \notin K$" não possui prova em F.

Demonstração.

Logo, a função f_K seria computável, e o conjunto K seria, então, recursivo, contrariando o fato (demonstrado no vídeo anterior) de que K não é recursivo.

Portanto, não é possível que $\vdash_F P_n$, para um dado n, se e somente se $n \notin K$. ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br